Ορισμός: Δείκτης ή αριθμός κατάστασης ενός αντιστρέψιμου πίνακα A ως πρός τη νόρμα $\|\cdot\|$ ορίζεται ως $\kappa(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$.

$\kappa_2(A)=\|A\|_2\cdot\|A^{-1}\|_2$. Προφανώς $\kappa(A)\geq 1$.

$$1=\|I\|=\|A\cdot A^{-1}\|\leq\|A\|\cdot\|A^{-1}\|=\kappa(A).$$

Αν A είναι μη αντιστρέψιμος, ορίζουμε ως $\kappa(A)=\infty$.

Θεώρημα: Για το δείκτη κατάστασης ως πρός τη νόρμα $\|\cdot\|$ ισχύει

$$\frac{1}{\kappa(A)}\leq\inf_{\substack{B\in\mathbb{R}^{n,n}\\ \det(B)=0}}\frac{\|A-B\|}{\|A\|}.$$

Απόδειξη

Έστω $B\in\mathbb{R}^{n,n}$ μη αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ τω $Bx=0$.
Επομένως: $(A-B)x=Ax \Leftrightarrow A^{-1}\cdot(A-B)\cdot x=x \Rightarrow \|A^{-1}\cdot(A-B)\cdot x\|=\|x\|\Rightarrow$
$\|A^{-1}\|\cdot\|A-B\|\cdot\|x\|\geq\|x\|\Rightarrow 1\leq\|A^{-1}\|\cdot\|A-B\|\Leftrightarrow\frac{1}{\kappa(A)}\leq\frac{\cancel{\|A^{-1}\|}\cdot\|A-B\|}{\|A\|\cdot\cancel{\|A^{-1}\|}}=$
$\frac{\|A-B\|}{\|A\|}$, Η ανισότητα θα ισχύει και για το B που δίνει το infimum.

Ασκ. Να αποδειχτεί ότι κάθε πίνακας $A\in\mathbb{C}^{n,n}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $A=B+C$, όπου B είναι ερμιτιανός $(B^H=B)$ κ' C αντιερμιτιανός $(C^H=-C)$.

$$\left.\begin{array}{l}A=B+C\\ A^H=B^H+C^H=B-C\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{l}B=\frac{A+A^H}{2}\\ C=\frac{A-A^H}{2}\end{array}$$

Έστω B', C' διαφορετικοί πίνακες, τότε $\left.\begin{array}{l}A=B'+C'\\ A^H=B'-C'\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}B'=B\\ C'=C\end{array}$

για την πλήρης απόδειξη.

Ασκ. Έστω $A\in\mathbb{C}^{n,n}$ μη αντιστρέψιμος πίνακας και B, C τω $A=B-C$ με B να'ναι αντιστρέψιμος. Νδο $\rho(B^{-1}C)\geq 1$ και $\|B^{-1}\|\geq\frac{1}{\|C\|}$

Απόδειξη

$\exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ τω $Ax=0 \Leftrightarrow (B-C)x=0 \Leftrightarrow Bx = Cx \Leftrightarrow x = B^{-1}Cx \Rightarrow$
$1 \in \sigma(B^{-1}C) \Rightarrow \rho(B^{-1}C) \geq 1$

$\|x\| = \|B^{-1}Cx\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|C\| \cdot \|x\| \Leftrightarrow 1 \leq \|B^{-1}\| \|C\| \Leftrightarrow \|B^{-1}\| \geq \frac{1}{\|C\|}$

$1 \leq \rho(B^{-1}C) \leq \|B^{-1}C\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|C\| \Rightarrow \|B^{-1}\| \geq \frac{1}{\|C\|}$

Αθροισμα ιδιοτιμών, το ίχνος είναι
Γινόμενο -ιι- είναι η ορίζουσα

χαρακτηριστικό πολυων.
$\det(\lambda I - A) = P_n(\lambda) = \lambda^n - \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\right)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \cdot \det(A)$

ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι όλες ιδιοτιμές του A, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$.

$P_n(\lambda) = \lambda^n - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\lambda^n + \dots + (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i$

$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)$

→ Αν $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ερμιτιανός, τότε $\|A\|_2 = \rho(A)$
$\|A\|_2 = (\rho(A^* A))^{1/2} = (\rho(A^2))^{1/2} = ((\rho(A))^2)^{1/4} = \rho(A)$

Αν λ ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα x, τότε $Ax = \lambda x \Rightarrow A^2 x = \lambda x A = \lambda^2 x$
Αν λ-ιδιοτιμή του A τότε λ^2 ιδιοτιμή του A^2, επαγωγικά λ^k ιδιοτιμή του A^k.

Ασκ.

Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $\|\cdot\|_F : \mathbb{C}^{n,n} \to [0,\infty)$ όπου ορίζεται ως
$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}, \forall A \in \mathbb{C}^{n,n}$
αποτελεί νόρμα, είναι η $\|\cdot\|_F$ φυσική νόρμα.

- Οι τρείς πρώτες ιδιότητες νορμών πινάκων ισχύουν επειδή ο A μπορεί να γραφεί ως διάνυσμα διάστασης n^2, y, τότε $\|A\|_F = \|y\|_2$.

- $\|AB\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}\right|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2\right)^{1/2}\right)^2\right)^{1/2} =$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)\right)^{1/2} = \left(\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)\right)^{1/2} =$$

$$= \|A\|_F \cdot \|B\|_F.$$

$\|I\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{1/2} = \sqrt{n} \neq 1$, άρα δεν είναι φυσική νόρμα.

→ Αν θεωρήσαμε τους πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ως διανύσματα στον $\mathbb{C}^{n^2}$ τότε η διανυσματική νόρμα άπειρο ($\|\cdot\|_\infty$) αντιστοιχεί με:

$$\|A\|_{MAX} = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

Είναι η $\|\cdot\|_{MAX}$ νόρμα?

Για την 4η ιδιότητα θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\|A\|_{MAX} = 1$, $\|A\|^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\|A^2\|_{MAX} = 2$.

$1 = \|A\|_{MAX} \cdot \|A\|_{MAX} < \|A^2\|_{MAX}$ δεν ισχύει άρα δεν είναι νόρμα

Ασκ. Αν $k_1(A)$, $k_2(A)$ και $k_\infty(A)$ είναι δείκτες κατάστασης του A ως προς τις νόρμες $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ και $\|\cdot\|_\infty$ αντίστοιχα, νδο $k_2(A)^2 \leq k_1(A)\cdot k_\infty(A)$

Αποδ

$k_2(A)^2 = \|A\|_2^2 \cdot \|A^{-1}\|_2^2 = \rho(A^H A)\cdot \rho((A^{-1})^H \cdot A^{-1}) \leq \|A^H \cdot A\|_1 \cdot \|(A^{-1})^H A^{-1}\|_1 \leq$

$\|A^H\|_1 \cdot \|A\|_1 \cdot \|(A^{-1})^H\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 \cdot \|A^H\|_1 \cdot \|(A^{-1})^H\|_1 = k_1(A) \cdot \|A\|_\infty \cdot$
$\|A^{-1}\|_\infty = k_1(A)\cdot k_\infty(A)$

Νδο για κάθε ορθογώνιο πίνακα A ($A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A^{-1} = A^T$) ισχύουν:

$\|A\|_2 = 1$, $\|A\|_1 \leq 1$, $\|A\|_\infty \leq 1$

Αποδ

$\|A\|_2 = (\rho(A^T \cdot A))^{1/2} = (\rho(I))^{1/2} = 1$

$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Επειδή $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I$ έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1 = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 \quad \forall i,j$

$$\|A\|_1^2=\left(\max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right)^2 \geq \sum_{i=1}^n a_{ij}^2=1 \Leftrightarrow \|A\|_1 \geq 1$$

Το ίδιο και για την $\|\cdot\|_\infty$.

→ Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ κ' $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ ορθογώνιος. ΝΔΟ: α) $\|QA\|_2=\|A\|_2=\|AQ\|_2$
β) Αν $\|A\|_2<1$ τότε ο $Q-A$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $\|(Q-A)^{-1}\|_2 \leq \frac{1}{1-\|A\|_2}$

• $\|QA\|_2=\left(\rho\left((QA)^T\cdot QA\right)\right)^{1/2}=\left(\rho(A^T\cdot Q^T\cdot Q\cdot A)\right)^{1/2}=\rho(A^T\cdot A)=\|A\|_2$.

• $\|AQ\|_2=\left(\rho((AQ)^T\cdot AQ)\right)^{1/2}=\left(\rho(Q^T\cdot A^T\cdot A\cdot Q)\right)^{1/2}=\left(\rho(A^T\cdot A)\right)^{1/2}$

Οι πίνακες $Q^T\cdot A^T\cdot A\cdot Q$ και $A^T\cdot A$ είναι όμοιοι μεταξύ τους. Επομένως έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές $\Rightarrow \rho(Q^TA^TAQ)=\rho(A^TA)$.

{Οι πίνακες A κ' B είναι όμοιοι αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας C τ.ω $A=C^{-1}\cdot B\cdot C$.}

$$\|(Q-A)^{-1}\|_2=\|(Q\cdot(I-Q^TA))^{-1}\|_2=\|(I-Q^TA)^{-1}Q^T\|_2=\|(I-Q^TA)^{-1}\|_2 \leq \frac{1}{1-\|Q^TA\|_2}$$

$$=\frac{1}{1-\|A\|_2}$$

• $\|Q^TA\|_2=\|A\|_2<1 \xRightarrow{\text{θ. Neumann}} I-Q^TA$ αντιστρέψιμος!

$\cancel{(x,x)=x^2}$ δεν ισχύει.

→ Να προσέχουμε στις θεωρητικές ασκ.

Ασκ 13 Να αποδειχθούν α) Αν $A,B \in \mathbb{R}^{n,n}$ συμμετρικοί τότε
$\rho(A+B)\leq\rho(A)+\rho(B)$, $\rho(AB)\leq\rho(A)\cdot\rho(B)$
β) Αν $P,Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ ορθογώνιοι πίνακες τότε
$\rho(Q+P)\leq 2$, $\rho(PQ)\leq 1$.

Λύση
α) A,B συμμετρικοί $\Rightarrow A+B$ συμμετρικός
$\rho(A+B)=\|A+B\|_2\leq\|A\|_2+\|B\|_2=\rho(A)+\rho(B)$
$\rho(A\cdot B)\leq\|A\cdot B\|_2\leq\|A\|_2\cdot\|B\|_2=\rho(A)\cdot\rho(B)$

β) • $\rho(P+Q)\leq\|P+Q\|_2\leq\|P\|_2+\|Q\|_2=2$
• $\rho(P\cdot Q)\leq\|PQ\|_2\leq\|P\|_2\cdot\|Q\|_2=1$, Ο $P\cdot Q$ είναι ορθογώνιος, η φασματική ακτίνα κάθε ορθογώνιου είναι 1.